Acc. Sc. Torino
Atti Sc. Fis. 149 (2015), 45-55

L'eredità scientifica di Guido Castelnuovo a 150 anni dalla nascita

Commemorazione tenuta dal Socio corrispondente MAURIZIO CORNALBA
nell'adunanza congiunta con l'Accademia Nazionale dei Lincei del 17 aprile 2015

Guido Castelnuovo nasce a Venezia il 14 agosto 1865. Compiuti gli studi liceali nella città natale si iscrive all'Università di Padova, dove si laurea in matematica nel 1886 sotto la guida di Giuseppe Veronese. Questi era uno dei principali esponenti, insieme a Eugenio Bertini e al più giovane Corrado Segre, della scuola, in quegli anni dominante in Italia, di geometria degli "iperspazi", come venivano allora chiamati gli spazi proiettivi di dimensione arbitraria. Come è naturale, la tesi di Castelnuovo, poi pubblicata con il titolo *Studio dell'involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello spazio a* n *dimensioni* [1], mostra l'influenza evidente di Veronese, sia nella problematica che nei metodi. Tuttavia essa costituisce un importante banco di prova, nel caso particolare delle curve razionali, per idee e tecniche che Castelnuovo applicherà poco dopo alle curve algebriche in generale.

Dopo un anno di perfezionamento trascorso a Roma presso Luigi Cremona, nel 1887 Castelnuovo diviene assistente alla cattedra di algebra complementare e geometria analitica nell'Università di Torino. A Torino Castelnuovo stabilisce presto rapporti di amicizia e di intensa collaborazione scientifica con Corrado Segre, di poco più anziano di lui e con il quale era già in contatto epistolare. Con lui Castelnuovo condivide il disegno di utilizzare i metodi della geometria proiettiva iperspaziale per lo studio delle curve algebriche.

La teoria delle curve algebriche aveva avuto origine, per opera soprattutto di Niels Henrik Abel, Carl Gustav Jacob Jacobi e Bernhard Riemann, come capitolo della teoria delle funzioni, quello delle funzioni algebriche di una variabile. La relazione algebrica intercorrente tra variabile e funzione algebrica viene interpretata già da Riemann come l'equazione di una curva piana. Con Riemann e i suoi immediati successori la teoria raggiunge, nei suoi risultati centrali, un aspetto pressoché definitivo. Riemann scopre che le curve possono essere classificate in base ai valori di parametri discreti e continui. In primo luogo ad ogni curva può essere associato un intero non negativo, il genere, che da un lato determina il tipo topologico della curva e dall'altro rappresenta il numero di differenziali abeliani indipendenti esistenti sulla curva stessa. Le curve di genere assegnato dipendono poi da parametri continui, di cui Riemann valuta il numero. Il genere interviene anche in uno dei risultati centrali della

[1] Atti del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti (6) 4, 1885-86, pp. 1167-1199.

teoria, il teorema di Riemann-Roch, che fornisce una stima del numero di funzioni meromorfe indipendenti con singolarità assegnate presenti sulla curva. La teoria era stata riformulata in forma algebrica e geometrica da Clebsch, e soprattutto da Alexander von Brill e Max Noether nella famosa memoria *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*[2], apparsa nel 1874. L'oggetto di indagine è la geometria della curva piana associata a una funzione algebrica, che viene studiata mediante la considerazione delle serie lineari, cioè dei gruppi di punti tagliati sulla curva stessa da altre curve variabili in un sistema lineare.

Il progetto di usare metodi proiettivi iperspaziali per studiare le curve algebriche viene attuato da Castelnuovo nelle due importanti memorie *Geometria sulle curve ellittiche*[3] e *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*[4], entrambe apparse nel 1889, nelle quali la teoria di Brill e Noether viene riformulata in modo assai più naturale e trasparente. Il punto di vista assunto è francamente, anche se non dichiaratamente, birazionale. L'accento è dunque posto su quei caratteri e proprietà delle curve che sono invarianti per trasformazioni birazionali, cioè per corrispondenze algebriche genericamente biunivoche tra curve. Questo permette a Castelnuovo di non essere limitato a considerare una curva come fisicamente immersa in uno specifico spazio proiettivo, ma di poter utilizzare tutte le realizzazioni proiettive della curva da studiare. Le serie lineari vengono viste come tagliate da sistemi lineari di iperpiani su opportune realizzazioni proiettive della curva. Vengono introdotte e studiate operazioni algebriche sulle serie lineari quali somma, sottrazione e moltiplicazione per un intero. Castelnuovo dà anche una nuova notevole dimostrazione del teorema di Riemann-Roch, basata in parte su idee di Segre. Nel secondo dei due lavori, con un metodo semplice ma geniale, Castelnuovo determina inoltre il massimo genere di una curva di grado assegnato in uno spazio proiettivo e descrive esplicitamente le curve di genere massimo.

Verso la fine del periodo torinese gli interessi di Castelnuovo si rivolgono decisamente allo studio delle superficie. All'epoca una teoria generale delle superficie era solo stata abbozzata, soprattutto in una importante memoria del Noether[5] apparsa nel 1875, ed erano noti soprattutto risultati sparsi, dovuti allo stesso Noether, Clebsch, Cayley, Zeuthen e altri. Erano state estese alle superficie, nello spirito della memoria di Brill e Noether sulla teoria delle curve, nozioni come quella di sistema lineare, di aggiunzione e di sistema canonico.

---

[2] Mathematische Annalen 7 (1874), pp. 269-310.

[3] Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali 24, 1988-89, pp. 4-22.

[4] Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali 24, 1988-89, pp. 346-373.

[5] *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*, Mathematische Annalen 8, 1875, pp. 495-533.

Erano state studiate superficie particolari e si conoscevano, sotto ipotesi restrittive, formule di tipo Riemann-Roch. Erano state proposti non uno, ma almeno due diversi analoghi della nozione di genere di una curva, il genere geometrico e il genere aritmetico. Si sapeva che il secondo era sempre minore o uguale al primo, e che poteva, contrariamente al primo, assumere anche valori negativi. La differenza tra i due generi, detta irregolarità, era un mistero. Non esisteva una classificazione delle superficie che in qualche modo assomigliasse a quella delle curve mediante il genere.

Uno del primi lavori di Castelnuovo sulle superficie, dal titolo *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie algebrica*[6], appare nel 1891 e contiene i risultati delle prime ricerche di teoria generale delle superficie condotte in Italia. Fino ad allora i soli esempi noti di superficie irregolari, cioè con irregolarità non nulla, erano dati da superficie rigate. Nel lavoro di Castelnuovo, tra altri risultati, si trovano i primi esempi di superficie irregolari non (birazionali a) rigate. Come vedremo, il tema dell'irregolarità ricorre costantemente nell'opera scientifica di Castelnuovo, tanto che il suo ultimo lavoro, del 1949, ha per titolo *Sul numero dei moduli di una superficie irregolare*[7].

Un altro lavoro molto importante, sempre del 1891, è la lunga memoria *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*[8]. In esso Castelnuovo sviluppa, nel caso particolare delle superficie razionali, cioè birazionali al piano, molti degli strumenti tecnici che saranno più tardi essenziali per lo studio delle superficie in generale, come ad esempio la distinzione tra caratteri effettivi e virtuali, la nozione di serie caratteristica, l'uso sistematico dell'aggiunzione.

Nell'autunno del 1891 Castelnuovo viene chiamato a ricoprire la cattedra di geometria analitica e proiettiva presso l'Università di Roma, che terrà fino al collocamento a riposo nel 1935. A Roma, nel novembre del 1892, Castelnuovo fa la conoscenza di Federigo Enriques, laureatosi un anno prima a Pisa e venuto a Roma per il perfezionamento presso Cremona. È un incontro cruciale per i due protagonisti e più in generale per lo sviluppo della geometria algebrica, e segna l'inizio di una collaborazione durata molti anni e documentata da una fitta corrispondenza. Le personalità dei due, più intuitiva e impetuosa quella di Enriques, più riflessiva e prudente quella di Castelnuovo, si complementano con reciproco vantaggio. Nel breve giro di pochi mesi dalle conversazioni tra i due prende forma la nuova geometria delle superficie. Ecco come Castelnuovo ricorda quelle conversazioni nella sua commemorazione di Enriques[9]:

---

[6] R. Istituto lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti (2) 24, 1891, pp. 127-137, pp. 307-318.

[7] Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti (8) 7, 1949, pp. 3-7, 8-11.

[8] Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (2) 42, 1891, pp. 3-43.

[9] *Commemorazione del Socio Federigo Enriques*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti (8) 2, 1947, pp. 3-21.

... Federigo Enriques era un mediocre lettore ... Adottai quindi un altro metodo: la conversazione. Non già la conversazione davanti a un tavolo col foglio e la penna, ma la conversazione peripatetica.

Cominciarono allora quelle interminabili passeggiate per le vie di Roma, durante le quali la geometria algebrica fu il tema preferito dei nostri discorsi. Assimilate in breve tempo le conquiste della scuola italiana nel campo delle curve algebriche, l'Enriques si accinse arditamente a trattare la geometria sopra una superficie algebrica. Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo ad una critica severa. Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l'indirizzo italiano ...

È da notare come Castelnuovo, con un tratto tipico della sua natura generosa, sembri attribuire al collega il merito principale della costruzione della nuova teoria. In realtà il suo contributo fu assai più sostanzioso di quanto non appaia dalle sue parole. Una indicazione della difficoltà del compito che Castelnuovo e Enriques si erano prefissi traspare dalla descrizione che Castelnuovo fa, nella sua comunicazione al Congresso Internazionale dei Matematici del 1928 [10], del metodo da loro seguito, in questo caso specifico riguardo al problema dell'irregolarità:

... Val forse la pena di accennare qual era il metodo di lavoro che seguivamo allora per rintracciare la via nell'oscurità in cui ci trovavamo. Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà colla costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le due famiglie di superficie ...

[10] *La geometria algebrica e la scuola italiana*, in Atti del Congresso Internazionale dei Matematici (Bologna, 3 – 10 settembre 1928), tomo I (Rendiconti del Congresso – Conferenze), Zanichelli, Bologna 1928, pp. 191-201.

Nell'estate del 1893 Enriques completa la prima trattazione organica della teoria, che apparirà l'anno successivo con il titolo *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* [11]; in questa memoria, come pure nella sua rielaborazione *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* [12] (1896), si nota forte l'influenza di Castelnuovo. Nel 1901 Castelnuovo e Enriques pubblicheranno una esposizione complessiva della teoria, completa dei risultati da loro nel frattempo ottenuti, nella memoria *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* [13].

Per parte sua, nella stessa estate del 1893, Castelnuovo riesce a dimostrare la razionalità delle involuzioni piane [14]; in altre parole dimostra che se una superficie X è unirazionale, cioè se esiste una corrispondenza algebrica genericamente finita a uno tra il piano e X, quest'ultima deve essere razionale, cioè birazionale al piano. Questo risultato generalizza alle superficie un noto teorema di Lüroth per le curve. La dimostrazione si basa sul metodo, già introdotto da Castelnuovo, delle aggiunzioni iterate. Le ipotesi forzano il procedimento a condurre sempre, dopo un numero finito di passi, a un sistema lineare vuoto ("estinguersi dell'aggiunzione"), e Castelnuovo riesce a dedurre la razionalità di X dall'analisi delle curve di genere basso alle quali conduce l'ultima aggiunzione. Il teorema di Castelnuovo è un vero punto di svolta nella teoria delle superficie ed è tanto più notevole, a parte la difficoltà della dimostrazione, in quanto l'enunciato analogo in dimensione superiore a due è falso. Già nel 1912 Enriques [15] dava un esempio di varietà tridimensionale unirazionale ma non razionale, sia pure con argomentazioni largamente incomplete. Bisognerà aspettare fino agli anni 1971-72 perché, indipendentemente gli uni dagli altri, con metodi diversi tra loro e basandosi su esempi diversi tra loro, Iskovskikh e Manin [16], Clemens e Griffiths [17], Artin e Mumford [18] diano dimostrazioni esaurienti della falsità dell'analogo del teorema di Lüroth in dimensione 3 o superiore a 3.

---

[11] Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (2) 44, 1894, pp. 171-232.

[12] Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana della Scienze, detta dei XL (3) 10, 1896, pp. 1-81.

[13] Annali di Matematica pura ed applicata (3) 6, 1901, pp. 165-225.

[14] *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Mathematische Annalen 44, 1894, pp. 125-155.

[15] *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti (5) 21, 1912, pp. 81-83.

[16] *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem*, Matematicheskii Sbornik (N. S.) 86, 1971, pp. 140-166.

[17] *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Annals of Mathematics (2) 95, 1972, pp. 281-356.

[18] *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) 25, 1972, pp. 75-95.

Le curve razionali sono caratterizzate, fra tutte le curve, dall'avere genere zero. Si sapeva che le superficie razionali hanno entrambi i generi, geometrico e aritmetico, nulli (o, equivalentemente, genere geometrico e irregolarità nulli) e si sospettava, per analogia con il caso unidimensionale, che questa condizione fosse anche sufficiente per la razionalità di una superficie. Il problema però resisteva a ogni tentativo di soluzione, anche da parte di Castelnuovo. Enriques avrebbe poco dopo mostrato come associare a ogni superficie una successione infinita di invarianti birazionali, i plurigeneri, il primo dei quali non è altro che il genere geometrico. Il secondo di questi invarianti, il bigenere, era comunque già noto, in qualche sua forma, a Castelnuovo e Enriques. Una superficie razionale ha bigenere nullo. Le argomentazioni di Castelnuovo non erano in grado di escludere l'esistenza di superficie con generi nulli ma bigenere diverso da zero, e quindi non razionali. In una lettera del luglio 1894 Enriques [19] suggerisce a Castelnuovo un possibile esempio di una tale superficie, quella che poi doveva essere chiamata "superficie di Enriques":

... Sarebbe proprio strana l'esistenza di sup di gen 0 *aventi delle sup* ψ_{2n-8} *ma non delle* ψ_{n-4}*; tuttavia non mi meraviglierebbe. Guarda un po' se fosse tale una sup del* 6*º ord avente come doppi i* 6 *spigoli d'un tetraedro (se esiste)?* ...

In effetti la superficie di Enriques esiste e ha generi nulli ma bigenere pari a uno. Castelnuovo riesce però a dimostrare che una superficie di generi nulli che abbia anche bigenere nullo è razionale. Dato che l'annullarsi del bigenere implica l'annullarsi del genere geometrico ciò mostra che una superficie è razionale se e solo se ha irregolarità e bigenere nulli (*Sulle superficie di genere zero*, 1896) [20].

Il criterio di razionalità dimostrato da Castelnuovo è di importanza fondamentale e segna l'inizio della classificazione delle superficie, poi portata avanti soprattutto da Enriques. Il criterio, tra l'altro, implica facilmente la razionalità delle involuzioni piane dimostrata pochi anni prima da Castelnuovo.

Negli ultimi anni del XIX secolo e nei primi del successivo Castelnuovo porta numerosi altri importanti contributi alla teoria delle superficie. A lui ad esempio si deve il teorema di Riemann-Roch per superficie generali, anche irregolari (*Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, 1897) [21].

---

[19] *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, a cura di U. Bottazzini, A. Conte e P. Gario, Bollati Boringhieri, Torino 1996, lettera 111, p. 125.

[20] Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana della Scienze, detta dei XL (3) 10, 1896, pp. 103-123.

[21] Annali di Matematica pura ed applicata (2) 25, 1897, pp. 235-318.

Nello stesso lavoro e in uno precedente del 1896 [22] sullo stesso argomento Castelnuovo dimostra anche che ogni superficie contenente un fascio irrazionale di curve è irregolare e che la cosiddetta deficienza, o difetto di completezza, di un sistema lineare non può superare l'irregolarità della superficie su cui il sistema è tracciato. Sono affermazioni che alla luce delle conoscenze attuali possono apparire banali, ma in un'epoca nella quale la natura dell'irregolarità era ignota non lo erano affatto, e anzi furono passi essenziali nel permettere in seguito di comprendere questa natura. Ancora a Castelnuovo si deve un inizio di classificazione delle superficie in base al valore del genere lineare e in particolare una caratterizzazione delle superficie rigate tramite questo invariante [23].

Abbiamo più volte accennato al problema dell'irregolarità. Nel 1905 Castelnuovo e, indipendentemente da lui, Francesco Severi compiono l'ultimo passo nella dimostrazione (o, come vedremo, quasi-dimostrazione) dell'uguaglianza tra l'irregolarità di una superficie e il numero di differenziali semplici di prima specie tra loro indipendenti esistenti sulla superficie stessa [24], uguaglianza che Castelnuovo aveva congetturato fin dal 1894. È questo un teorema con molti padri, tra i quali, oltre a Castelnuovo e Severi, vanno citati Enriques, Émile Picard e Georges Humbert, e infine Henri Poincaré. La dimostrazione di Castelnuovo, come quella di Severi, fa uso essenziale di un risultato ottenuto l'anno precedente da Enriques [25] che afferma l'esistenza, sopra una superficie algebrica di irregolarità q, di una famiglia algebrica irriducibile a $q+r$ parametri di curve, dove r è la dimensione del sistema lineare nel quale varia la curva generica del sistema. Di questo stesso risultato Poincaré avrebbe dato nel 1910 una dimostrazione per via trascendente [26]. Parecchi anni dopo ci si sarebbe resi conto che la dimostrazione di Enriques, all'epoca generalmente accettata come soddisfacente, era errata. Il teorema sull'irregolarità restava comunque valido grazie al risultato di Poincaré, ma mancava una dimostrazione puramente algebrica.

---

[22] *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana della Scienze, detta dei XL (3) 10, 1896, pp. 335-360.

[23] *Sul genere lineare di una superficie algebrica e sulla classificazione a cui esso dà luogo*, Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti (5) 6, 1897, pp. 372-378, 406-413.

[24] *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Rendiconti (5) 14, 1905, pp. 545-556, 593-598, 655-663.

[25] *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna (N.S.) 9, 1905, pp. 5-13.

[26] *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (3) 27, 1910, pp. 55-108.

Nonostante numerosi tentativi, per questa si sarebbe dovuto attendere fino al 1960 circa, quando la questione sarebbe stata interamente chiarita come corollario dei risultati ottenuti da Alexander Grothendieck ed esposti nella serie dei suoi Seminari Bourbaki dal titolo collettivo *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique*[27]. La parte forse più interessante dell'argomento di Castelnuovo è la prima apparizione di quella che egli battezza varietà di Picard di una superficie, sulla quale egli introduce una operazione di gruppo che la rende una varietà abeliana di dimensione pari all'irregolarità della superficie. Con il chiudersi dell'anno 1906 Castelnuovo sembra voltare pagina, e da questo momento cessa di contribuire attivamente alle ricerche più avanzate di geometria. Pur continuando a seguire assiduamente gli sviluppi della geometria algebrica, sia attraverso i contatti con i colleghi che attraverso l'insegnamento e la formazione di nuovi allievi, da quel punto pubblicherà solo sporadicamente su argomenti geometrici. Il lavoro che chiude la stagione più importante e feconda della vita scientifica di Castelnuovo è *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions*[28], scritto in collaborazione con Enriques. Nel lavoro si dimostra che l'irregolarità, definita ora come numero dei differenziali semplici di prima specie indipendenti, non cambia nel passare da una varietà proiettiva di dimensione superiore a due a una sua sezione iperpiana. È questo un caso particolare, o si potrebbe dire un presagio, del primo teorema sulle sezioni iperpiane che Solomon Lefschetz avrebbe dimostrato quasi vent'anni dopo[29].

Dopo il 1906 Castelnuovo inizia a coltivare con entusiasmo giovanile nuovi interessi scientifici. Dapprima si occupa intensamente dell'insegnamento secondario della matematica e della formazione degli insegnanti, anche nella sua veste di membro della Commissione Nazionale per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie e successivamente di Presidente della Mathesis, l'associazione degli insegnanti di matematica di scuola secondaria. Interviene attivamente negli organismi nazionali e internazionali che si occupano di didattica e delinea i programmi di matematica per il Liceo Moderno, istituzione che avrà però vita breve e scomparirà con la riforma Gentile.

Viene attratto in modo crescente dal calcolo delle probabilità. Nel 1914 lo fa oggetto per la prima volta di uno dei suoi corsi e nel 1919 pubblica il trattato *Calcolo delle probabilità*[30], che rielaborerà tra il 1925 e il 1928. All'argomento porta anche contributi originali, il più notevole dei quali è la memoria *Sul problema dei momenti*[31].

[27] Séminaire Bourbaki, exposés 190, 195 (1959-60), 212, 221 (1960-61), 232, 236 (1961-62).

[28] Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (3) 23, 1906, pp. 339-366.

[29] *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris 1924.

[30] *Calcolo delle probabilità*, Società Editrice Dante Alighieri, Milano-Roma-Napoli 1919.

[31] Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari 1, 1930, pp. 137-169.

Convinto della grande importanza sia teorica che pratica del calcolo delle probabilità, nel 1920 promuove l'istituzione presso la Facoltà di Scienze della Università di Roma di un insegnamento di calcolo delle probabilità e di matematica attuariale e, nel 1927, di una "Scuola di scienze statistiche e attuariali".

Negli anni Venti compaiono nella sua opera nuovi interessi, che potremmo definire di filosofia naturale. È tra i primi in Italia a cogliere l'importanza della teoria della relatività generale alla quale nel 1923 dedica il volume *Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein*[32]. Sul piano istituzionale, si impegna per convincere la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma a istituire quella che fu la prima cattedra in Italia di Fisica teorica, poi ricoperta dal giovanissimo Fermi. Negli anni successivi, con saggi e recensioni sulla rivista "Scientia", prende parte attiva al dibattito sul determinismo aperto dalle teorie quantistiche, sulle ipotesi cosmologiche, sulla natura della probabilità.

Nel 1938 le leggi razziali precludono a Castelnuovo i consueti canali di comunicazione scientifica e di insegnamento, ma non gli impediscono di dare vita, tra il 1941 e il 1943, alla "Università clandestina", con lo scopo di offrire un'educazione universitaria ai giovani ebrei. Durante l'occupazione tedesca di Roma Castelnuovo vive in clandestinità, ottenendo precaria ospitalità da conoscenti e allievi. Dopo la liberazione di Roma nel 1944 Castelnuovo, per il suo prestigio scientifico e per le sue doti di rettitudine ed equilibrio, appare tra le persone più indicate per ricostruire le istituzioni scientifiche italiane. Viene nominato Commissario del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nel quale in seguito presiede il Comitato per la Matematica e la Fisica. Negli stessi anni si occupa della ricostituzione della Accademia dei Lincei, della quale diviene Presidente nel 1946. Nel 1949 viene nominato Senatore a vita. Muore a Roma il 27 aprile 1952.

Qual è stata la fortuna dell'opera scientifica di Castelnuovo – e più in generale della scuola italiana di geometria algebrica – negli anni successivi alla sua morte? Castelnuovo stesso non guarda con ottimismo al futuro quando nel 1949, nella prefazione all'edizione postuma de *Le superficie algebriche* di Enriques[33], scrive:

... Verrà presto il continuatore dell'opera delle scuole italiana e francese, il quale riesca a dare alla teoria delle superficie algebriche la perfezione che ha raggiunto la teoria delle curve algebriche? Lo spero ma ne dubito ...

... la matematica ha preso nel secolo attuale un indirizzo ben diverso da quello che dominava nel secolo scorso. La fantasia, la intuizione che guidavano la ricerca di allora sono oggi guardate con sospetto per il terrore degli errori a cui possono condurre. Le teorie sorgevano per rispondere al bisogno

[32] *Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein*, Zanichelli, Bologna 1923.

[33] *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna 1949.

che il matematico provava di delineare e precisare degli oggetti del pensiero che erano già, in forma vaga, presenti alla sua mente. Era l'esplorazione di un ampio territorio intravisto da una cima lontana. Si costruirono così nel secolo scorso quei gioielli che si chiamano teoria delle funzioni analitiche, delle funzioni ellittiche, abeliane, superficie ad area minima, superficie cubiche... Oggi più che il terreno da esplorare interessa la via che vi conduce, e questa via ora vien seminata di ostacoli artificiali, ora si libra tra le nuvole ...

Sono le parole di un uomo di 84 anni, e soprattutto sono scritte in quello che è forse il momento più difficile per la scuola italiana di geometria. Questa aveva perso già dagli anni Trenta del secolo scorso buona parte del suo slancio propulsivo, a causa del crescente isolamento internazionale dell'Italia ma soprattutto per cause endogene. La scuola era rimasta troppo legata ai suoi metodi tradizionali rifiutando di aprirsi a sufficienza alle tecniche nuove che sarebbero state indispensabili per dare giustificazione rigorosa ai risultati ottenuti. In altre parole ci si era spinti troppo in là lungo il ramo senza puntellarlo adeguatamente. Ci si era così ritrovati con numerosi risultati per i quali non era chiaro se fossero stati adeguatamente dimostrati o addirittura se fossero corretti, e anche con risultati palesemente falsi ma strenuamente difesi.

La situazione era ulteriormente complicata dalla crescente divergenza tra il linguaggio usato dalla scuola italiana e quello prevalente altrove. Tutto questo aveva posto in una cattiva luce anche i risultati solidi, ed erano la grande maggioranza, che erano stati ottenuti, tanto da far dire a qualcuno che la sola cosa certa nella produzione della scuola italiana era che non ci si poteva fidare.

A dire il vero Castelnuovo era stato sempre visto come rigoroso e accurato. Ad esempio David Mumford, la cui opinione riflette probabilmente anche quella del suo maestro Oscar Zariski, lo descrive come "... totally rigorous, a splendid mathematician"[34]. Tuttavia in qualche misura anch'egli era stato coinvolto nel discredito in cui era caduta la scuola italiana.

Si era dunque resa necessaria un'opera di rifondazione di tutta la geometria algebrica su basi solide, condotta nella sua fase iniziale soprattutto da Zariski e da André Weil. Nel momento in cui Castelnuovo scriveva la sua prefazione all'Enriques, quest'opera di rifondazione stava per essere completata con il contributo essenziale delle nuove tecniche topologiche e di teoria dei fasci provenienti dalla geometria complessa, ad opera principalmente di Kunihiko Kodaira, Jean-Pierre Serre e infine Grothendieck.

L'"esplorazione di ampi territori" non tardava a seguire. Nel 1954 Friedrich Hirzebruch dimostra il suo teorema di Riemann-Roch per varietà di dimensione arbitraria, e una vasta generalizzazione di quest'ultimo viene dimostrata da Grothendieck nel 1957. Negli anni Cinquanta e Sessanta Kodaira riprende la classificazione delle superficie dal punto di vista della geometria complessa riformulandola in linguaggio moderno e completandola, estendendola tra l'altro alle superficie non algebriche. Negli anni Sessanta la stessa classificazione

[34] Messaggio di posta elettronica del 23 novembre 1994 alla mailing list del progetto QED, accessibile alla URL: http://mizar.org/qed/mail-archive/volume-2/0122.html.

delle superficie viene rivisitata, da un punto di vista più algebro-geometrico e vicino all'originale, nel seminario di Igor Shafarevich. Il lavoro sulla classificazione continua tuttora, e la classificazione stessa è stata generalizzata al caso di caratteristica positiva da Enrico Bombieri e Mumford. Lo studio della struttura e la classificazione delle varietà di dimensione superiore a 2 hanno letteralmente preso il volo a partire dal 1980 circa.

Tutto questo lavorio ha portato alla rivalutazione e alla "messa in sicurezza" di quasi tutta la grande massa di risultati ottenuti dalla scuola italiana, e da Castelnuovo in particolare. Si può dire che questa costituisce gran parte del nucleo fondamentale della geometria algebrica come la conosciamo oggi.

In un certo senso Castelnuovo ha avuto una sorte simile a quella di certi grandi artisti che, passati di moda per qualche tempo, vengono poi rivalutati e riacquistano la posizione di preminenza che meritano.